2.9.16 Přirozená exponenciální funkce, přirozený logaritmus

V části matematiky, která se nazývá diferenciální počet (čeká nás až na konci čtvrtého ročníku), se zkoumají funkce. Velmi důležité je zejména hledání funkce, která nám o nějaké jiné funkci říká, jak se mění její hodnoty.

Rychlost nám říká, jak se v každém okamžiku mění dráha tělesa $\Rightarrow$ funkce $v = at$ nám říká, jak se mění funkce $s = \frac{1}{2}at^2$.

Jak vypadá derivace exponenciální funkce?

Funkce	**Její derivace**
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y' \doteq -0,69314 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y = 2^x$	$y' \doteq 0,69314 \cdot 2^x$
$y = 3^x$	$y' \doteq 1,09861 \cdot 3^x$
$y = 4^x$	$y' \doteq 1,38629 \cdot 4^x$
$y = 8^x$	$y' \doteq 2,07944 \cdot 8^x$

Příklady exponenciálních závislostí:

- **počet atomů radioaktivní látky:** Hodnota funkce odpovídá počtu atomů, změna hodnoty odpovídá počtu atomů, které ubudou (ten je ale opět dán pomocí počtu atomů, které v látce existují, protože právě polovina z nich se během poločasu rozpadu zaniká).
- **množství peněz na účtu:** Hodnota funkce odpovídá počtu peněz na účtu, změna hodnoty odpovídá množství peněz, které přibudou (tedy úrokům připsaným od banky. Množství peněz, které banka na účet připíše, zase odpovídá množství uložených peněz).

$\Rightarrow$ I prostou úvahou vidíme, že u exponenciálních funkcí je od funkce k její derivaci velmi blízko.

Funkce	**Její derivace**
$y = a^x$	$y' = k_a \cdot a^x$

Potřebujeme najít funkci, pro kterou platí $k_a = 1$. Z tabulky je vidět, že:

- k_a je zřejmě logaritmus při nějakém neznámém základu ($k_{\frac{1}{2}} = -k_2$, $k_4 = 2k_2$, $k_8 = 3k_2$

  $\Rightarrow$ tato čísla splňují pravidla pro logaritmy)
- hledané číslo $a \in (2;3)$ ($k_2 \doteq 0,69314$, $k_3 \doteq 1,09861$)

Správná hodnota hledaného čísla je další základní matematická konstanta (velmi podobná číslu π), jmenuje se **Eulerovo číslo** $e \doteq 2,718281828459045235360287471352662497 75$

Eulerovo číslo (podobně jako π):

Exponenciální funkce $y = e^x$ se nazývá **přirozená exponenciální funkce**.

(Přirozená exponenciální funkce je funkce, jejíž změna je v každém okamžiku rovna její hodnotě.)

K ní inverzní logaritmická funkce o základu e $y = \log_e x$ se nazývá **přirozená logaritmická funkce (přirozený logaritmus)**.

(Přirozený logaritmus má ze všech logaritmických funkcí nejhezčí derivaci $y = \frac{1}{x}$.)

Značení: Místo $y = \log_e x$ píšeme $y = \ln x$.

Problém:

Na kalkulačkách se vyskytují většinou pouze tlačítka pro $\ln x$ a $\log x$ $\Rightarrow$ pomocí kalkulaček můžeme určovat pouze logaritmy se základem e a 10 $\Rightarrow$ musí existovat vzorec, jak snadno určit i logaritmus při jiném základě.

Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$, $b > 0$; $b \neq 1$ a pro všechna kladná čísla r platí:

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

Př. 1: Urči pomocí kalkulačky přibližnou hodnotu (na 6 desetinných míst) $\log_2 3$.

Podle vzorce platí $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \doteq \frac{0,477121254}{0,301029995} = 1,584962501$

nebo $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \doteq \frac{1,098612289}{0,69314718} = 1,584962501$.

nebo dokázat:

Platí: $r = a^{\log_a r}$ - **rovnost zlogaritmujeme při základu *b*** = na obou stranách rovnice jsou čísla, která se rovnají, pokud z obou čísel uděláme logaritmy při základu *b* (libovolné kladné číslo různé od jedné), budou se rovnat i nadále.

$\log_b r = \log_b a^{\log_a r}$ - použijeme pravidlo pro mocninu uvnitř logaritmu.

$\log_b r = \log_a r \cdot \log_b a \quad / : \log_b a$

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

Př. 2: Odhadni (s přesností na celá čísla) hodnoty logaritmů a pak je vypočti pomocí kalkulačky:

a) $\log_3 11$ b) $\log_{0,5} 0,6$ c) $\log_2 0,1$

a) $\log_3 11 \in (2;3)$, $\log_3 11 = 2,182658$ b) $\log_{0,5} 0,6 \in (0;1)$, $\log_{0,5} 0,6 = 0,736966$

c) $\log_2 0,1 \in (-4;-3)$, $\log_2 0,1 = -3,321928$

Vzorec pro změnu základu můžeme využít při výpočtu některých logaritmů:

$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$ - všechna čísla jsou mocninami tří $\Rightarrow$ převedeme na podíl logaritmů při základu 3

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = \frac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\log_3 3^{-2}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

Př. 3: Pomocí vzorce pro změnu základu vypočti bez kalkulačky:

a) $\log_8 \sqrt[3]{4}$ b) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4}$

a) $\log_8 \sqrt[3]{4} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{4}}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}$ b) $\log_9 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-\frac{1}{3}}}{\log_3 3^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$

c) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 \sqrt{8}} = \frac{-2}{\log_2 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$